МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Новосибирский национальный исследовательский

государственный университет»

Факультет информационных технологий

Доманова Е. Д.

Определенный интеграл. Несобственный интеграл.

учебно-методическое пособие

Новосибирск

2013

Учебно-методическое пособие содержит теоретические сведения по темам «Определенный интеграл» и «Несобственный интеграл», которые сопровождаются примерами, упражнениями и комментариями, демонстрирующими разнообразие методов исследования определенного интеграла. Большое внимание в пособии уделяется рассмотрению интеграла с переменными пределами интегрирования как одному из способов представления функций, а также получению оценок и асимптотики интегралов.

Пособие состоит из трех глав и приложения. В приложении представлены вопросы коллоквиума и образец контрольной работы по теме.

Целевая аудитория: студенты 1 курса ФИТ.

Разработка является оригинальной и соответствует программе базового курса математического анализа для студентов ФИТ НГУ.

Автор Доманова Е. Д.

Учебно-методическое пособие подготовлено в рамках реализации

Программы развития НИУ-НГУ на 2009–2018 г.г.

Глава 1

Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Формула интегрирования по частям. Замена переменной в определенном интеграле

1.1. Определения

Изучая дифференциальное исчисление, мы убедились, что производная функции заключает в себе много информации о самой функции, поэтому естественным образом возникает вопрос: а можно ли восстановить функцию по ее производной? То есть можно ли отыскать функцию $F(x)$, если она удовлетворяет уравнению $F'(x) = f(x)$, где $f(x)$ — известная функция?

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$, а дифференцируемая на $(a; b)$ функция $F(x)$ такова, что во всех точках этого интервала выполняется условие $F'(x) = f(x)$. Тогда функция $F(x)$ называется *точной первообразной* функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$.

Замечание. Доказано (и мы будем этим при необходимости пользоваться), что всякая непрерывная на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ имеет на нем точную первообразную. Но стоит допустить наличие хотя бы одной точки разрыва, и функция $f(x)$ уже может не иметь точной первообразной.

Упражнение. Покажите, что функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ не имеет точной первообразной на любом интервале, содержащем точку $x = 0$.

Как мы видим, задача нахождения точной первообразной может не иметь решения даже в простейшем случае, поэтому удобнее рассматривать понятие первообразной в более широком смысле.

Напомним, что *промежутком* $\langle a; b\rangle$ мы называем такое множество точек вещественной прямой, которое вместе с любыми точками x и y содержит отрезок $[x; y]$, их соединяющий (это свойство называется выпуклостью). Таким образом, отрезки $[a; b]$, интервалы $(a; b)$, полуинтервалы $(a; b]$ и $[a; b)$, лучи $(a; +\infty)$ и $(-\infty; b)$, и вся вещественная прямая являются промежутками. Далее, если не оговорено особо, при записи различных видов промежутков $\langle a; b\rangle$ предполагается, что $a < b$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $\langle a; b\rangle$. Функция $F(x)$ называется *обобщенной первообразной* функции $f(x)$ на промежутке $\langle a; b\rangle$, если

1) $F(x)$ непрерывна на промежутке $\langle a; b\rangle$,

2) во всех точках промежутка $\langle a; b\rangle$ за исключением, быть может, не более чем счетного множества M, $F(x)$ дифференцируема, причем $F'(x) = f(x)$.

Замечание. Понятно, что если функция является точной первообразной, то она должна быть непрерывной на интервале $(a; b)$, поскольку дифференцируема на нем. Однако, если функция не дифференцируема в какой-либо точке, ее непрерывность в этой точке уже ниоткуда не следует. Поэтому непрерывность обобщенной первообразной явным образом заложена в ее определении.

Для удобства дальнейшего изложения введем следующую терминологию: будем говорить, что некоторое условие выполнено *в основном* на множестве A, если оно выполнено во всех точках $x \in A$ за исключением, может быть, не более чем счетного подмножества $B \subset A$.

Упражнение. Верно ли, что вещественные числа в основном иррациональны? Верно ли, что монотонная на интервале функция в основном непрерывна?

Используя новую терминологию, можно сказать, что функция $F(x)$ является обобщенной первообразной функции $f(x)$ на промежутке $\langle a; b\rangle$, если $F(x)$ непрерывна на промежутке $\langle a; b\rangle$ и $F'(x) = f(x)$ в основном на $\langle a; b\rangle$.

Упражнение. Покажите, что функция $F(x) = |x|$ является обобщенной первообразной функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на множестве $\mathbb{R}$.

Упражнение. Вспомнив формулу производной от степенной функции, найдите обобщенные первообразные для функций $f_1(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ и $f_2(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

Упражнение. Верно ли, что $\sin x \neq 0$ в основном на множестве $\mathbb{R}$? Найдите обобщенную первообразную функции $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \cos x$.

Упражнение. Покажите, что функции $F_1(x) = \arcsin(\sin x)$ и $F_2(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ определены и непрерывны во всех точках $x \in \mathbb{R}$. Выясните, в каких точках у этих функций не существует производной. Нарисуйте графики функций $F_1(x)$, $F_2(x)$ и их производных. Могут ли функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ быть обобщенными первообразными для каких-то функций?

Замечание. Пусть каждое из условий $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... , $P_n(x)$ выполняется в основном на множестве A, то есть для каждого $k = 1, 2, ..., n$ существует не более чем счетное множество B_k такое, что условие $P_k(x)$ выполняется на множестве $A \setminus B_k$. Тогда на множестве $A \setminus B$, где $B = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$, выполняются одновременно все условия $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... , $P_n(x)$. Другими словами, условие $P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge ... \wedge P_n(x)$ выполняется в основном на множестве A.

1.2. Свойства интегрируемых функций

Определение. Функция $f(x)$ называется *интегрируемой* по промежутку $\langle a; b\rangle$, если $f(x)$ в основном определена на $\langle a; b\rangle$ и имеет на $\langle a; b\rangle$ обобщенную первообразную.

Замечание. Наряду с термином $f(x)$ интегрируема *по промежутку* $\langle a; b\rangle$ мы также будем употреблять его синоним $f(x)$ интегрируема *на промежутке* $\langle a; b\rangle$.

Перечислим основные свойства интегрируемых функций, большинство из которых непосредственно следует из определения первообразной и свойств операции дифференцирования.

1. Если функция $f(x)$ интегрируема на $\langle a; b\rangle$, и $\langle a_1; b_1\rangle \subset \langle a; b\rangle$, то функция $f(x)$ интегрируема на $\langle a_1; b_1\rangle$. Если $F(x)$ является обобщенной первообразной для $f(x)$ на промежутке $\langle a; b\rangle$, то $F(x)$ является обобщенной первообразной для $f(x)$ и на промежутке $\langle a_1; b_1\rangle$.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $\langle a; b\rangle$, то их линейная комбинация $\alpha f(x) + \beta g(x)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ также интегрируема на этом промежутке. Если $F(x)$ и $G(x)$ являются обобщенными первообразными на промежутке $\langle a; b\rangle$ для $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, то их линейная комбинация $\alpha F(x) + \beta G(x)$ является обобщенной первообразной для функции $\alpha f(x) + \beta g(x)$.

3. Если функция $f(x)$ интегрируема по промежутку $\langle a; b\rangle$, и $F(x)$ является ее обобщенной первообразной, а функция $g(x)$ такова, что $g(x) = f(x)$ в основном на $\langle a; b\rangle$, то $g(x)$ также интегрируема по этому промежутку, и $F(x)$ является ее обобщенной первообразной.

4. Если функция $f(x)$ определена на промежутке $\langle a; b\rangle$ и интегрируема на каждом из промежутков $(-\infty; c] \cap \langle a; b\rangle$ и $\langle a; b\rangle \cap [c; +\infty)$, где $c \in \langle a; b\rangle$, тогда $f(x)$ интегрируема на промежутке $\langle a; b\rangle$.

Действительно, если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются обобщенными первообразными функции $f(x)$ на промежутках $(-\infty; c] \cap \langle a; b\rangle$ и $\langle a; b\rangle \cap [c; +\infty)$ соответственно, то функция $F(x) = \begin{cases} F_1(x) - F_1(c), \text{ если } x < c \\ 0, \text{ если } x = c \\ F_2(x) - F_2(c), \text{ если } x > c \end{cases}$ определена и непрерывна на промежутке $\langle a; b\rangle$, причем $F'(x) = f(x)$ в основном на $\langle a; b\rangle$. Таким образом, $F(x)$ является обобщенной первообразной функции $f(x)$ на промежутке $\langle a; b\rangle$.

Упражнение. Найдите обобщенную первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \leqslant 0 \\ 3, \text{ если } x > 0 \end{cases}$ на промежутке $\mathbb{R}$. Постройте график функции $F(x)$.

Опираясь на теорему Лагранжа о промежуточном значении, можно доказать очень важное свойство:

5. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на интервале $(a; b)$, и $F(x)$ — ее обобщенная первообразная, тогда

если $f(x) \leqslant 0$ в основном на $(a; b)$, то $F(x)$ монотонно убывает,

если $f(x) \geqslant 0$ в основном на $(a; b)$, то $F(x)$ монотонно возрастает,

если $f(x) = 0$ в основном на $(a; b)$, то $F(x)$ является постоянной на интервале $(a; b)$ функцией.

Из последнего утверждения сразу же следует, что

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на интервале $(a;b)$, а $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — ее обобщенные первообразные, тогда их разность $F_2(x) - F_1(x)$ является постоянной на интервале $(a;b)$ функцией.

Таким образом, все семейство обобщенных первообразных функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ можно описать формулой $F(x) = F_1(x) + C$, где — любая из обобщенных первообразных функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная.

Упражнение. Найдите обобщенные первообразные функции $f(x)$ из предыдущего упражнения, удовлетворяющие условиям $F_1(0) = 1$ и $F_2(0) = -2$. Постройте графики функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$.

Пример. Рассмотрим функцию $F(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. Нетрудно убедиться, что $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ при всех $x \in \mathbb{R}$, кроме $x = 0$. Означает ли это, что функция $F(x)$ обобщенной первообразной функции $f(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ на промежутке $\mathbb{R}$?

Ответ отрицательный. В точке $x = 0$ функция $F(x)$ терпит разрыв: ее предел справа в точке $x = 0$ равен $+\pi/2$, а предел слева равен $-\pi/2$. Положим $F_1(x) = \begin{cases} F(x) + \pi/2, & \text{если } x < 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ F(x) - \pi/2, & \text{если } x > 0 \end{cases}$ Понятно, что функция $F_1(x)$ непрерывна в точке $x = 0$ и на всей прямой $\mathbb{R}$, и $F_1'(x) = F'(x) = f(x)$. Следовательно, $F_1(x)$ является обобщенной (и даже точной) первообразной функции $f(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ на промежутке $\mathbb{R}$.

Нетрудно заметить, что функции $F_2(x) = \operatorname{arcctg} x$ и $F_3(x) = -\operatorname{arctg} x$ также непрерывны на всей прямой и их производные также равны $f(x)$. Следовательно, они являются точными первообразными для функции $f(x)$. Более того, $F_3(0) = 0$, следовательно, $F_3(x) \equiv F_1(x)$.

Упражнение. Постройте графики функций $F(x)$, $F_2(x)$ и $F_3(x)$. Как связаны между собой функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$?

Свойство 6 влечет за собой очень простое утверждение:

7. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, тогда величина $F(b) - F(a)$ не зависит от выбора обобщенной первообразной $F(x)$ функции $f(x)$.

Заметим, что если функция $F(x)$ является обобщенной первообразной для функции $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$, то это означает, в частности, что $F(x)$ непрерывна *на отрезке* $[a;b]$, поэтому ее значения в точках a и b определены.

Определение. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, и $F(x)$ является ее обобщенной первообразной на этом отрезке. Величина $F(b)-F(a)$ называется *определенным интегралом* (или просто интегралом) функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$, и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Таким образом, мы полагаем *по определению*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — произвольная обобщенная первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Свойство **7** говорит о корректности такого определения.

Замечание. Для приращения функции $F(b) - F(a)$ используются также другие обозначения: $F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$, $F(x)\Big|_a^b$, $\Delta_a^b F(x)$.

Замечание. В большинстве классических учебников по математическому анализу символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ обозначается интеграл Римана функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$, а термины «интеграл Римана» и «определенный интеграл» являются синонимами. Равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

называемое *формулой Ньютона-Лейбница*, в таком случае является теоремой, устанавливающей связь между интегралом Римана по отрезку с одной стороны и приращением первообразной на этом отрезке — с другой стороны.

Понятие определенного интеграла можно распространить также на случай, когда промежуток интегрирования $\langle a;b\rangle$ бесконечен или обобщенная первообразная $F(x)$ определена лишь на интервале $(a;b)$. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a+0} F(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} F(x)$, то положим

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b-0} F(x) - \lim_{x\to a+0} F(x) = F(x)\Big|_{a+0}^{b-0}$$

Если значения a и b конечны, а функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, это определение полностью совпадает с исходным. Таким образом, мы расширили понятие определенного интеграла на случай открытого или бесконечного промежутка.

В классических курсах математического анализа в таком случае говорят о несобственном интеграле, и при условии существования конечных пределов $\lim\limits_{x\to a+0} F(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} F(x)$ говорят, что несобственный интеграл сходится. Определение интеграла по промежутку, данное выше, делает различение собственных и несобственных интегралов излишним. Как мы увидим далее, при замене переменной собственные интегралы легко могут превратиться в несобственные и наоборот.

1.3. Свойства определенных интегралов

Из перечисленных выше свойств интегрируемых функций легко следуют следующие свойства определенных интегралов:

Линейность. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $\langle a;b\rangle$, то их линейная комбинация $\alpha f(x)+\beta g(x)$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ также интегрируема на этом промежутке, причем

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int\limits_a^b f(x)\,dx+\beta\int\limits_a^b g(x)\,dx$$

Аддитивность. Если функция $f(x)$ интегрируема на каждом из промежутков $(-\infty;c]\cap\langle a;b\rangle$ и $\langle a;b\rangle\cap[c;+\infty)$, где $c\in\langle a;b\rangle$, тогда $f(x)$ интегрируема по промежутку $\langle a;b\rangle$, причем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx$$

Замечание. Часто используют другой вариант этого утверждения: если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $\langle a;b\rangle$, то при любом выборе точки $c\in\langle a;b\rangle$ функция $f(x)$ интегрируема на каждом из промежутков $(-\infty;c]\cap\langle a;b\rangle$ и $\langle a;b\rangle\cap[c;+\infty)$, причем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx$$

Пример. Вычислим интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$.

Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\sqrt{1-\sin 2x} = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x} = \\ = \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} = |\cos x - \sin x|$$

Далее, избавимся от знака модуля:

$$|\cos x - \sin x| = \begin{cases} \cos x - \sin x, & x \in [0;\pi/4] \\ \sin x - \cos x, & x \in [\pi/4;\pi/2] \end{cases}$$

По отдельности на отрезках $[0;\pi/4]$ и $[\pi/4;\pi/2]$ первообразные указанных функций легко найти, но «склеивать» из них одну первообразную для всего отрезка $[0;\pi/2]$ нет необходимости. Представляя отрезок $[0;\pi/2]$ в виде объединения $[0;\pi/4] \cup [\pi/4;\pi/2]$ и пользуясь аддитивностью интеграла, получаем

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} |\cos x - \sin x|\,dx = \int\limits_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx + \\ + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\,dx = (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \\ = (2\frac{1}{\sqrt{2}} - 1) - (1 - 2\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2(\sqrt{2}-1).$$

Продолжим перечисление свойств определенного интеграла.

Монотонность. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $\langle a;b\rangle$, причем $f(x) \leqslant g(x)$ в основном на интервале $(a;b)$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Если же выполняется более сильное условие $f(x) < g(x)$ в основном на интервале $(a;b)$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx < \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Замечание. Можно сказать, что неравенство $\int\limits_a^b f(x)\,dx < \int\limits_a^b g(x)\,dx$ получено почленным интегрированием неравенства $f(x) < g(x)$.

Отметим как частный случай монотонности утверждение о *сохранении знака*: если функция $g(x)$ интегрируема на промежутке $\langle a;b\rangle$, и $g(x) \geqslant 0$ в основном на интервале $(a;b)$, тогда $\int\limits_a^b g(x)\,dx \geqslant 0$. Если $g(x) > 0$ в основном на интервале $(a;b)$, тогда $\int\limits_a^b g(x)\,dx > 0$.

Пример. Рассмотрим последовательность интегралов

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что эта последовательность строго монотонно убывает.

Действительно, поскольку $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ на отрезке $[0;\pi/2]$, то $\sin^n x \geqslant \sin^{n+1} x$, причем равенство выполняется только на концах отрезка. Таким образом, $\sin^n x > \sin^{n+1} x$ в основном на отрезке $[0;\pi/2]$, поэтому, в силу монотонности интеграла,

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx > \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x\,dx = I_{n+1}$$

Упражнение. Сравните интегралы $\int\limits_0^1 e^{-x}\,dx$ и $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$; также сравните интегралы $\int\limits_1^a e^{-x}\,dx$ и $\int\limits_1^a e^{-x^2}\,dx$ при $a > 1$.

Следствием монотонности являются важные и часто используемые свойства интеграла, перечисленные ниже :

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $\langle a; b\rangle$, причем $|f(x)| \leqslant g(x)$ в основном на интервале $(a; b)$, тогда

$$\Big|\int\limits_a^b f(x)\,dx\Big| \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

2. Если функции $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы на промежутке $\langle a; b\rangle$, то

$$\Big|\int\limits_a^b f(x)\,dx\Big| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

3. Если функция $|f(x)|$ интегрируема на промежутке $\langle a; b\rangle$, и $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx = 0$, то $f(x) = 0$ в основном на промежутке $\langle a; b\rangle$.

В качестве примера применения этих свойств докажем интегральный вариант неравенства Коши–Буняковского.

Неравенство Коши–Буняковского. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные на отрезке $[a; b]$ функции. Тогда

$$\Big(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\Big)^2 \leqslant \Big(\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\Big)\Big(\int\limits_a^b g^2(x)\,dx\Big),$$

причем равенство выполняется если и только если функции $f(x)$ и $g(x)$ линейно зависимы, то есть $\exists \mu \in \mathbb{R} \,\Big|\, f(x) \equiv \mu g(x)$.

Это неравенство справедливо при менее ограничительных условиях на функции $f(x)$ и $g(x)$, но мы рассматриваем непрерывные на отрезке функции исключительно для упрощения некоторых моментов доказательства. Так, если $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные на отрезке $[a;b]$ функции, то функции $f^2(x)$, $g^2(x)$ и $f(x)g(x)$, входящие в формулировку утверждения, также непрерывны на отрезке $[a;b]$, и следовательно, интегрируемы.

Кроме того, функция $(f(x)-\lambda g(x))^2$ также непрерывна и интегрируема на отрезке $[a;b]$. Заметим, что $0 \leqslant (f(x)-\lambda g(x))^2$ при любом значении $\lambda \in \mathbb{R}$, поэтому

$$0 \leqslant \int\limits_a^b (f(x)-\lambda g(x))^2\,dx = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx - 2\lambda\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx + \lambda^2\int\limits_a^b g^2(x)\,dx$$

Поскольку квадратичная относительно переменной λ функция, стоящая в правой части этого неравенства, неотрицательна при любых значениях λ, то ее дискриминант не превосходит нуля:

$$\frac{D}{4} = \Big(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\Big)^2 - \Big(\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\Big)\Big(\int\limits_a^b g^2(x)\,dx\Big) \leqslant 0$$

Перенося второе слагаемое в правую часть неравенства, получаем требуемое.

Допустим, что для некоторых функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет место равенство

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\Big)^2 = \Big(\int_a^b f^2(x)\,dx\Big)\Big(\int_a^b g^2(x)\,dx\Big).$$

Это означает, что дискриминант рассматриваемой квадратичной функции равен нулю, следовательно, она имеет единственный корень $\lambda = \mu$. Другими словами, при этом значении $\lambda = \mu$

$$0 = \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\mu\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \mu^2\int_a^b g^2(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - \mu g(x))^2\,dx$$

В силу свойства **3** из равенства нулю интеграла от неотрицательной функции $(f(x)-\mu g(x))^2$ следует равенство нулю самой функции в основном на отрезке $[a;b]$. Но поскольку она непрерывна, то она равна нулю в каждой точке отрезка. Итак, нашлось единственное значение μ такое, что $f(x) \equiv \mu g(x)$, что и требовалось доказать.

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на конечном промежутке $\langle a;b\rangle$ (a, $b \in \mathbb{R}$) и $m \leqslant f(x) \leqslant M$ в основном в промежутке $\langle a;b\rangle$ (m и M также конечны), тогда

$$m\cdot(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\cdot(b-a).$$

Если же $m < f(x) < M$ в основном в промежутке $\langle a;b\rangle$, тогда

$$m\cdot(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M\cdot(b-a).$$

Пример. Покажем, что имеет место двусторонняя оценка

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+a^2\sin^2 x}\,dx < \frac{\pi}{2}(1+\frac{a^2}{4}), \quad a \neq 0$$

Оценим подынтегральную функцию. Неравенство $1 < \sqrt{1 + a^2 \sin^2 x}$ очевидно выполняется во всех точках отрезка $[0; \pi/2]$, за исключением точки $x = 0$. Поэтому

$$\frac{\pi}{2} = \int\limits_0^{\pi/2} 1\, dx < \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 + a^2 \sin^2 x}\, dx$$

Для получения оценки сверху вспомним, что дифференцируемая функция $\sqrt{1+t}$ выпукла вверх. Это, в частности, означает, что касательная, проведенная в точке $t_0 = 0$, в других точках расположена выше графика функции, то есть $\sqrt{1+t} < 1 + \frac{t}{2}$ при $t \neq 0$.

Таким образом, $\sqrt{1 + a^2 \sin^2 x} < 1 + \frac{a^2}{2} \cos^2 x$ во всех точках отрезка $[0; \pi/2]$, за исключением точки $x = 0$. Проинтегрируем это неравенство:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 + a^2 \sin^2 x}\, dx < \int\limits_0^{\pi/2} (1 + \frac{a^2}{2} \sin^2 x)\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{a^2}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$$

Понижаем степень с помощью формулы двойного угла:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x - \frac{\sin 2x}{2})\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

Таким образом, получаем оценку интеграла сверху:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 + a^2 \sin^2 x}\, dx < \frac{\pi}{2} + \frac{a^2}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}(1 + \frac{a^2}{4})$$

Пример. Рассмотрим последовательность интегралов

$$I_n = \int\limits_0^1 x^n e^{-x^2}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что эта последовательность стремится к нулю при $n \to +\infty$.

Очевидно, $x^n e^{-x^2} > 0$ при $x > 0$, поэтому $I_n = \int\limits_0^1 x^n e^{-x^2}\,dx > 0$.

Поскольку функция e^{-x^2} убывает на отрезке $[0;1]$, то $e^{-x^2} \leqslant e^0 = 1$. Следовательно, $x^n e^{-x^2} < x^n$ в основном на отрезке $[0;1]$, и

$$I_n = \int\limits_0^1 x^n e^{-x^2}\,dx < \int\limits_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Таким образом, $0 < I_n < \dfrac{1}{n+1}$, поэтому $I_n \to 0$ при $n \to +\infty$.

Упражнение. Покажите, что $I(\varepsilon) = \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+\varepsilon x^k} \to 1$ при $\varepsilon \to 0$ $(k \in \mathbb{N})$

Связь определенного интеграла и частичных сумм. Если непрерывная на отрезке $[1;n]$ функция $f(x)$ монотонно убывает, тогда

$$f(2) + ... + f(n) \leqslant \int\limits_1^n f(x)\,dx \leqslant f(1) + ... + f(n-1)$$

Для доказательства представим отрезок $[1;n]$ в виде объединения отрезков $\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}[k;k+1]$, и воспользуемся аддитивностью интеграла:

$$\int\limits_1^n f(x)\,dx = \int\limits_1^2 f(x)\,dx + ... + \int\limits_{n-1}^n f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx\Big)$$

На каждом из отрезков $[k;k+1]$ в силу монотонного убывания функции $f(x)$ имеет место оценка $f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$. Интегрируя это неравенство по отрезку $[k; k+1]$ и учитывая, что длина отрезка равна 1, получаем оценку $f(k+1) \leqslant \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k)$. Просуммировав полученные неравенства по k от 1 до $n-1$, получим требуемое.

Упражнение. Рассмотрите функцию $f(x) = \dfrac{1}{x}$ и получите двустороннюю оценку частичной суммы гармонического ряда $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

Упражнение. Рассмотрите функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$, $p > 0$, $p \neq 1$, и получите двустороннюю оценку частичной суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^p}$.

1.4. Формула интегрирования по частям

Пусть функции $F(x)$ и $G(x)$ являются обобщенными первообразными на промежутке $\langle a; b\rangle$ для функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Нетрудно проверить, что тогда функция $h(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$ интегрируема на промежутке $\langle a; b\rangle$, и функция $H(x) = F(x)G(x)$ является ее обобщенной первообразной.

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $\langle a; b\rangle$, функции $F(x)$ и $G(x)$ являются их обобщенными первообразными на этом промежутке. Если функция $f(x)G(x)$ интегрируема на $\langle a; b\rangle$, тогда функция $F(x)g(x)$ также интегрируема на $\langle a; b\rangle$. Если при этом существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a+0} F(x)G(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} F(x)G(x)$, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)G(x)\,dx = F(x)G(x)\Big|_{a+0}^{b-0} - \int\limits_{a}^{b} F(x)g(x)\,dx$$

Эта формула и называется *формулой интегрирования по частям.* Учитывая, что по определению $f(x) = F'(x)$, $g(x) = G'(x)$, часто эту формулу записывают в следующем виде:

$$\int\limits_a^b F'(x)G(x)\,dx = F(x)G(x)\Big|_{a+0}^{b-0} - \int\limits_a^b F(x)G'(x)\,dx$$

Эта формула позволяет «перебрасывать» операцию дифференцирования с одного сомножителя на другой, что помогает свести вычисление сложных интегралов к более простым.

Пример. Вычислим $\int\limits_0^\pi x\sin x\,dx$.

Положим в формуле интегрирования по частям $F'(x) = \sin x$, $G(x) = x$.

$$\int\limits_0^\pi x\sin x\,dx = x(-\cos x)\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi 1\cdot(-\cos x)\,dx = \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi$$

Пример. Пусть функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\sin nx\,dx \to 0$ при $n\to+\infty$.

Действительно, представим $\sin nx$ как производную от $-\dfrac{1}{n}\cos nx$ и проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_a^b f(x)\sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\Big(f(x)\cos nx\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)\cos nx\,dx\Big) =$$

$$= \frac{1}{n}\Big(f(a)\cos na - f(b)\cos nb + \int\limits_a^b f'(x)\cos nx\,dx\Big)$$

Функции $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, следовательно, ограничены. Обозначим $M = \max\limits_{[a;b]}|f(x)|$, $K = \max\limits_{[a;b]}|f'(x)|$, тогда

$$|f(a)\cos na - f(b)\cos nb| \leqslant 2M,$$

$$\Big|\int\limits_a^b f'(x)\cos nx\,dx\Big| \leqslant \int\limits_a^b |f'(x)|\,dx \leqslant K\cdot(b-a)$$

Следовательно, $\Big|\int\limits_a^b f(x)\sin nx\,dx\Big| \leqslant \frac{1}{n}(2M+K\cdot(b-a))$, откуда сразу же получаем требуемое.

Формула интегрирования по частям служит также источником получения рекуррентных формул для интегралов, содержащих параметр (как правило, натуральное число). Их часто называют «формулами понижения», поскольку они позволяют уменьшать значение параметра, а при малых значениях параметра интеграл может быть вычислен непосредственно.

Пример. Вычислим интеграл $I(n;m)=\int\limits_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$, $(m,\ n\in\mathbb{N})$.

Применим формулу интегрирования по частям, рассматривая функцию $(1-x)^m$ как производную от $-\frac{1}{m+1}(1-x)^{m+1}$:

$$\int\limits_0^1 x^n(1-x)^m\,dx = -\frac{1}{m+1}x^n(1-x)^{m+1}\Big|_0^1 + \frac{n}{m+1}\int\limits_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m+1}\,dx$$

Внеинтегральное слагаемое обращается в ноль, а подынтегральное выражение мы преобразуем следующим образом:

$$x^{n-1}(1-x)^{m+1} = x^{n-1}(1-x)\cdot(1-x)^m = x^{n-1}(1-x)^m - x^n(1-x)^m$$

Тогда

$$I(n;m) = \frac{n}{m+1}\Big(\int\limits_0^1 x^{n-1}(1-x)^m\,dx - \int\limits_0^1 x^n(1-x)^m\,dx\Big) =$$

$$= \frac{n}{m+1}\Big(I(n-1;m) - I(n;m)\Big)$$

Отсюда $I(n;m) = \dfrac{n}{m+n+1}I(n-1;m)$. Применяя эту формулу многократно, получим

$$I(n;m) = \frac{n(n-1)...1}{(m+n+1)(m+n)...(m+2)}I(0;m) =$$
$$= \frac{n!}{(m+n+1)!}(m+1)!\int\limits_0^1 (1-x)^m\,dx = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$$

Упражнение. Покажите, что $I_n = \int\limits_0^1 (\ln x)^n\,dx = (-1)^n n!$

Упражнение. Для интеграла $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ получите рекуррентную формулу $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ при $n \geqslant 2$. Вычислите с ее помощью интегралы I_4 и I_5. Докажите, что $I_n = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\dfrac{\pi}{2}, \text{ если } n = 2k \\ \\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \text{ если } n = 2k+1 \end{cases}$

Упражнение. Пусть $I(m;n) = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^m \cos^n x\,dx$ $(m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N})$. Докажите рекуррентные формулы

$$I(m;n) = \frac{n-1}{m+n}I(m;n-2), (n \geqslant 2)$$

$$I(m;n) = \frac{m-1}{m+n}I(m-2;n), (m \geqslant 2)$$

Вычислите с их помощью $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 \cos^6 x\,dx$

1.5. Замена переменной в определенном интеграле

В дальнейшем мы столкнемся с тем, что условие $a < b$ в записи интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ может не выполняться. Однако символу $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ можно придать значение и в этом случае. Положим $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$, если $a > b$, и $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$. Легко убедиться, что независимо от взаимного расположения точек a и b на прямой имеет место равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Теорема о замене переменной в определенном интеграле. Пусть $f(x)$ интегрируема на промежутке $\langle a; b\rangle$, функция $F(x)$ — ее обобщенная первообразная на этом промежутке. Непрерывная функция $\varphi : \langle c; d\rangle \to \langle a; b\rangle$ такова, что

1. функция $\varphi(t)$ дифференцируема в основном в интервале $(c; d)$

2. множество значений $t \in \langle c; d\rangle$ таких, что $F(x)$ не дифференцируема в точке $x = \varphi(t)$, не более чем счетно

Тогда функция $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ интегрируема на промежутке $\langle c; d\rangle$, функция $F(\varphi(t))$ является ее обобщенной первообразной и для любых α, $\beta \in \langle c; d\rangle$

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$$

Замечание. Часто приведенную выше формулу, в которой от интегрирования сложной функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ переходят к интегрированию более простой функции $f(x)$, называют формулой подстановки или внесения под дифференциал, поскольку $\varphi'(t)\,dt = d(\varphi(t))$.

Одна из сложностей в этом случае — вглядевшись в подынтегральное выражение, угадать функцию $\varphi(t)$. Стандартные рецепты подстановок мы изучали при освоении техники интегрирования, и сейчас не будем на этом останавливаться. При вычислении определенных интегралов появляются новые моменты, на которые следует обратить внимание.

С одной стороны, перейдя от интегрирования по переменной t к интегрированию по переменной x, нам не надо возвращаться обратно к исходной переменной, как мы это делали при вычислении первообразных. Это серьезно облегчает вычисления, особенно если приходится делать не одну, а несколько замен переменной подряд. С другой стороны, иногда могут возникнуть трудности с определением новых пределов интегрирования. Рассмотрим примеры.

Пример. Вычислим интеграл $\int\limits_0^1 \frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt$.

Преобразуем подынтегральное выражение, поделив числитель и знаменатель на t^2:

$$\int\limits_0^1 \frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt = \int\limits_0^1 \frac{1+1/t^2}{t^2+1/t^2}\,dt = \int\limits_0^1 \frac{1+1/t^2}{(t-1/t)^2+2}\,dt$$

Заметим, что $1+1/t^2 = (t-1/t)'$, и положим $x = \varphi(t) = t - 1/t$. Тогда

$$\frac{(1+1/t^2)\,dt}{(t-1/t)^2+2} = \frac{dx}{x^2+2}$$

Выясним, каковы пределы интегрирования для переменной x. Производная функции $x = t - 1/t$ на интервале $(0;1)$ положительна, следовательно, функция монотонно возрастает от $\varphi(0) = -\infty$ до $\varphi(1) = 0$. Поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt = \int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^0 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Пример. Вычислим интеграл $\int\limits_{-1}^1 \frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt$.

Сделав подстановку $x=\varphi(t)=t-1/t$, и формально вычислив $\varphi(-1)$ и $\varphi(1)$, мы получим интеграл $\int\limits_0^0 \frac{dx}{x^2+2}=0$. Однако функция $\frac{t^2+1}{t^4+1}$ строго положительна на отрезке $[-1;1]$, поэтому интеграл от нее также должен быть положительным.

Дело в том, что функция $x=t-1/t$ терпит разрыв в точке $x=0$, поэтому применять теорему о замене переменной ко всему отрезку $[-1;1]$ нельзя. Однако, представив его в виде объединения $[-1;0]\cup[0;1]$, можно сделать указанную подстановку на каждой из его половинок.

Упражнение. Покажите, что $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{t^4+1}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Упражнение. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt$ двумя способами — применяя подстановки $x=\operatorname{tg} t$ и $x=\operatorname{ctg} t$

Формулу замены переменной можно применять и «в обратном направлении», справа налево.

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

В этом случае нам изначально известен промежуток изменения переменной x, и мы должны так подобрать непрерывную на $\langle\alpha;\beta\rangle$ и дифференцируемую в основном в интервале $(\alpha;\beta)$ функцию $\varphi(t)$, чтобы ее значения накрывали промежуток $\langle a; b\rangle$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Упражнение. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dt$ несколькими способами — применяя замены $x = \sin t$ и $x = \cos t$, и выбирая для t промежутки изменения $[-\pi/2; 0]$, $[0; \pi/2]$ и $[\pi/2; \pi]$. Можно ли взять промежуток $t \in [-\pi/2; \pi]$?

Пример. Вычислим интеграл $\int\limits_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$.

Положим $x - a = (b-a)\sin^2 t$. Необходимо так выбрать промежуток изменения переменной t, чтобы переменная x пробежала все значения от a до b. Например, $t \in [0; \pi/2]$.

Тогда $b - x = (b-a) - (x-a) = (b-a)(1-\sin^2 t) = (b-a)\cos^2 t$, $\sqrt{(x-a)(b-x)} = \sqrt{(b-a)^2\sin^2 t\cos^2 t} = (b-a)|\sin t\cos t|$. Поскольку на промежутке $t \in [0; \pi/2]$ функции $\sin t$ и $\cos t$ неотрицательны, снимаем модуль и получаем

$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = (b-a)\sin t\cos t = \frac{(b-a)}{2}\sin 2t$$

Осталось найти $dx = (b-a)2\sin t\cos t\,dt = (b-a)\sin 2t\,dt$ и перейти к интегрированию по t:

$$\int\limits_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx = \frac{(b-a)^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4}\int\limits_0^{\pi}\sin^2 y\,dy = \frac{(b-a)^2}{8}\pi$$

Нам уже не в первый раз приходится считать интеграл от функции $\sin^2 t$ по промежуткам, кратным $\pi/2$. Докажем несколько простых, но полезных формул, основанных различных симметриях тригонометрических функций, и позволяющих значительно сократить вычисления в этом и многих других случаях.

Пример. Пусть функция $f(y)$ непрерывна на отрезке $[0; 1]$. Тогда

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx$$

Для доказательства нам нужно подобрать такую замену переменной x, чтобы функция синус преобразовалась в косинус (поскольку функция $f(y)$ произвольная), а промежуток интегрирования $[0; \pi/2]$ отобразился на себя. Такими свойствами обладают тригонометрические формулы приведения, а точнее, формула $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$.

Итак, в интеграле слева делаем замену переменной $x = \dfrac{\pi}{2} - t$:

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx = \int\limits_{\pi/2}^{0} f(\sin(\frac{\pi}{2} - t))\,(-dt) = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos t)\, dt$$

В начале и в конце этой цепочки вычислений стоят интегралы по разным переменным. Возникает вопрос: доказали ли мы то, что хотели? Ответ положительный.

Действительно, переменная интегрирования в определенном интеграле может обозначаться любой буквой, поскольку интеграл от нее не зависит. В отличие от неопределенного интеграла или первообразной, являющихся функциями, определенный интеграл дает нам число. Поэтому можно смело написать $\int\limits_0^{\pi/2} f(\cos t)\, dt = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx$, и закончить доказательство.

Теперь, используя доказанное утверждение, заметим, что

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx \quad \Rightarrow$$

$$2I = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx + \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} 1\,dx = \pi/2$$

Отсюда $I = \pi/4$.

Упражнение. Функция $f(y)$ непрерывна на отрезке $[0;1]$. Докажите, что

$$\int\limits_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = \pi \int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx$$

Упражнение. Используя доказанные выше формулы, вычислите

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

Упражнение. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a;a]$. Докажите, что если функция $f(x)$ нечетна, тогда $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Если же функция $f(x)$ четна, тогда

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^{a} f(x)\,dx$$

Упражнение. Докажите, что $\int\limits_{-a}^{a} \cos x \cdot \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx = 0$ при $a \in (0;1)$

Упражнение. Функция $f(x)$ непрерывна при всех $x \in (-\infty; +\infty)$. Докажите, что если $f(x)$ — периодическая с периодом T, то при любом выборе значения a

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx$$

Решение. Пользуясь аддитивностью, представьте интеграл $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx$ в виде суммы $\int\limits_0^T f(x)\,dx + \int\limits_T^{a+T} f(x)\,dx - \int\limits_0^a f(x)\,dx$ и сделайте в среднем из интегралов замену $x = T + t$.

Упражнение. Рассмотрите функцию $I(p; q) = \int\limits_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$. Ранее мы вычисляли ее значение при натуральных p и q, теперь это любые положительные числа. Докажите, что $I(p; q) = I(q; p)$

Сделав подстановку $\sin^2 x = u$, выразите $J(m; n) = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^m \cos^n x\,dx$ через $I(p; q) = \int\limits_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$.

Глава 2

Интеграл с переменным пределом интегрирования. Теоремы о среднем

2.1. Интеграл с переменным пределом интегрирования

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на некотором промежутке $\langle a; b\rangle$. Зафиксируем точку $x_0 \in \langle a; b\rangle$, и каждому значению $x \in \langle a; b\rangle$ поставим в соответствие число $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$.

Функция $F(x) : x \mapsto \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ определена на промежутке $\langle a; b\rangle$ и является одной из обобщенных первообразных функции $f(x)$.

Действительно, если $F_1(x)$ — какая-либо обобщенная первообразная функции $f(x)$, то по определению

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt = F_1(x) - F_1(x_0)$$

Как видно из этой формулы, функция $F(x)$ отличается от функции $F_1(x)$ на постоянную величину. Это значит, что $F(x)$ также является обобщенной первообразной функции $f(x)$.

Заметим, что эта первообразная удовлетворяет условию $F(x_0) = 0$.

Упражнение. Покажите, что первообразная $F(x) = \int\limits_{0}^{x} f(t)\,dt$ нечетна, если функция $f(t)$ четна, и наоборот, первообразная $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ четна, если функция $f(t)$ нечетна.

Пример. Покажем, что первообразная $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ от непрерывной периодической функции с периодом T может быть представлена в виде суммы линейной и периодической с периодом T функции.

Рассмотрим функцию $g(t) = f(t) - A$, где $A = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\,dt$ — среднее значение функции $f(t)$ по периоду. Покажем, что ее первообразная $G(x) = \int\limits_0^x g(t)\,dt$ является периодической с периодом T функцией.

Действительно, $G(x+T) - G(x) = \int\limits_x^{x+T} g(t)\,dt = \int\limits_0^T g(t)\,dt$, поскольку $g(t)$ периодическая с периодом T функция.

Далее, $\int\limits_0^T g(t)\,dt = \int\limits_0^T (f(t) - A)\,dt = \int\limits_0^T f(t)\,dt - A \cdot T = 0$ в силу определения числа A.

Таким образом, $G(x+T) - G(x)$ для любого значения $x \in \mathbb{R}$.

И наконец, $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt = \int\limits_0^x (A + g(t))\,dt = Ax + G(x)$, что и требовалось доказать.

Упражнение. Покажите, что функции $\int\limits_0^x \sin^n t\,dt$ и $\int\limits_0^x \cos^n t\,dt$ при нечетном n — периодические с периодом 2π, а при четном n могут быть представлены в виде суммы периодической и линейной функции.

2.2. Интегрирование неравенств

Благодаря монотонности интеграла мы можем интегрировать неравенства, то легко можно установить факты, которые ранее были доказаны с гораздо большими усилиями.

Пример. Покажем, что при $x \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}$$

Вспомним известное неравенство $\sin t \leqslant t$, $(t \geqslant 0)$, и проинтегрируем его в пределах от 0 до x. Получаем

$$\int\limits_0^x \sin t\,dt \leqslant \int\limits_0^x t\,dt \;\Rightarrow\; (-\cos t)\Big|_0^x \leqslant \frac{t^2}{2}\Big|_0^x \;\Rightarrow\; 1 - \cos x \leqslant \frac{x^2}{2}$$

Отсюда $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$. Теперь проинтегрируем полученное неравенство также в пределах от 0 до x:

$$\int\limits_0^x \cos t\,dt \geqslant \int\limits_0^x (1 - \frac{t^2}{2})\,dt \;\Rightarrow\; (\sin t)\Big|_0^x \geqslant (t - \frac{t^3}{6})\Big|_0^x \;\Rightarrow\; \sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}$$

Упражнение. Покажите, что неравенство

$$\alpha \sin x + \beta \operatorname{tg} x > (\alpha + \beta) \cdot x$$

выполняется на промежутке $x \in (0; \pi/2)$ для любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Лемма. Если функция $\varphi(t) = O(t^p)$ при $t \to 0$ $(p \geqslant 0)$, тогда функция $\Phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt = O(t^{p+1})$ при $t \to 0$.

Действительно, $\varphi(t) = O(t^p)$ при $t \to 0$ означает, что существует такая окрестность U точки $t = 0$ и такое число K, что $|\varphi(t)| \leqslant K|t|^p$).

Интегрируя это неравенство в пределах от 0 до x при $x \in U$, $x > 0$, получаем

$$\Big|\int_0^x \varphi(t)\,dt\Big| \leqslant \int_0^x |\varphi(t)|\,dt \leqslant K_1 t^{p+1}$$

Рассмотрение случая $x < 0$ завершает доказательство.

Воспользовавшись этой леммой, довольно быстро можно получить разложения по степеням x в окрестности нуля для тех функций, для которых построение формулы Тейлора было затруднительно, поскольку оно связано с вычислением производных высокого порядка.

Пример. Получим разложение по степеням x в окрестности нуля для функции $F(x) = \operatorname{arctg} x$.

Заметим, что $\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$. Чтобы получить разложение подынетгральной функции по степеням t, вспомним формулу суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + ... + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q} = \sum_{k=0}^{n} q^k + \frac{q^{n+1}}{1-q}, \quad |q| < 1$$

Подставляя $q = -t^2$, получаем нужное нам разложение

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + ... + (-1)^n t^{2n} + \frac{t^{2n+2}}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + O(t^{2n+2}), \quad |t| < 1$$

Осталось только проинтегрировать это равенство, воспользовавшись утверждением леммы:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + O(x^{2n+3}),\ |x| < 1$$

Заметим, что полученное разложение является формулой Тейлора для функции $F(x) = \operatorname{arctg} x$ в точке $x = 0$, поскольку полином Тейлора определяется единственным образом и не зависит от способа его получения.

Поскольку функция $F(x) = \operatorname{arctg} x$ бесконечно дифференцируема, то можно говорить уже о ряде Тейлора

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},\ |x| < 1$$

который сходится в любой точке интервала $|x| < 1$.

Упражнение. Получите разложение по степеням x в окрестности нуля для функции $F(x) = \arcsin x$.

Упражнение. Получите разложение по степеням x в окрестности нуля для функции $F(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Упражнение. Получите два первых члена разложения по степеням x в окрестности нуля для функции $F(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, dt$.

2.3. Производная интеграла по верхнему (нижнему) пределу

Теорема. Если функция $f(t)$ непрерывна в точке $t = c$, то функция $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ дифференцируема в точке $x = c$ и $F'(c) = f(c)$.

Замечание. Если функция $f(t)$ непрерывна на промежутке $\langle a; b\rangle$, то для нее тем самым установлен факт существования точной первообразной на этом промежутке.

Если x — точка непрерывности функции $f(t)$, то можно утверждение теоремы записать следующим образом:

$$\Big(\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt\Big)' = f(x)$$

В этом случае говорят, что «производная от интеграла по верхнему пределу равна подынтегральной функции, вычисленной на верхнем пределе».

Замечание. Можно рассматривать интеграл как функцию нижнего предела интегрирования $G(x) = \int\limits_{x}^{x_0} f(t)\,dt$. Нетрудно видеть, что в этом случае $G'(c) = -f(c)$.

Замечание. Часто в математической литературе можно встретить запись такого вида $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx$. Нужно четко понимать, что в данном случае имеется в виду функция $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = F(\varphi(x)) - F(\psi(x))$. Она зависит от переменной x только через верхний и нижний пределы интегрирования, а переменная x, стоящая под знаком интеграла, является «локальной», и ее лучше заменить любой другой буквой.

По теореме о дифференцировании композиции

$$\frac{d}{dx}\Big(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt\Big) = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$$

Упражнение. Вычислите производную $\frac{d}{dx}\Big(\int\limits_{x}^{x^2}\sin^2 x\,dx\Big)$

Интеграл с переменным пределом интегрирования является удобным способом представления первообразной и изучения ее свойств. Особенно ярко это проявляется в случаях, когда первообразная не может быть выражена в элементарных функциях, то есть получена из элементарных функций применением конечного числа арифметических операций и операций композиции функций. Например, таковы многие специальные функции, встречающиеся в математической физике или математической статистике:

интегральный синус $\mathrm{Si}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

интегральный косинус $\mathrm{Ci}(x) = -\int\limits_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$

интегральный логарифм $\mathrm{Li}(x) = -\int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t} dt$, $x > 0$

синус-интеграл Френеля $\mathrm{S}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x \sin t^2 dt$

косинус-интеграл Френеля $\mathrm{C}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x \cos t^2 dt$

функция ошибок $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt$

дополнительная функция ошибок $\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Тем не менее, производные от этих интегралов являются элементарными функциями, что позволяет исследовать их так же, как «обычные» функции.

Пример. Найдем наименьшее значение интеграла $\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^3}$.

Подынтегральная функция непрерывна в любой точке $t \in \mathbb{R}$, поэтому интеграл является дифференцируемой функцией в любой точке $x \in \mathbb{R}$.

$\frac{d}{dx}\Big(\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^3}\Big) = \frac{1}{1+x^3}$. В точке $x = -1$ производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому в точке $x = -1$ интеграл имеет локальный минимум, равный $\Big(-\int\limits_{-1}^0 \frac{dt}{1+t^3}\Big)$. Других точек экстремума нет, поэтому найденное значение является наименьшим.

Пример. Найдем главный член асимптотики при $x \to 0$ интеграла

$$G(x) = \int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\, dt$$

Можно предположить, что $G(x) \sim \int\limits_0^x \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3}x^{3/2}$ при $x \to 0$, поскольку $\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$. Однако эти «правдоподобные» рассуждения не имеют под собой твердой основы. Попробуем все же доказать, что при $x \to 0$

$$G(x) = \int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\, dt \sim \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

Другими словами, нам надо показать, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{G(x)}{\sqrt{x^3}} = \frac{2}{3}$.

Заметим, что мы имеет дело с неопределенностью $\Big[\frac{0}{0}\Big]$. Действительно, $G(x)$ является непрерывной функцией как композиция непрерывных функций $F(y) = \int\limits_0^y \sqrt{\operatorname{tg} t}\, dt$ и $y = \sin x$. Нетрудно видеть, что $G(0) = 0$.

Поэтому $G(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Для раскрытия неопределенности воспользуемся правилом Лопиталя. Вычислим производную $G'(x) = \sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)} \cdot \cos x$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{G(x)}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)} \cdot \cos x}{3\sqrt{x}/2} = \frac{2}{3}$$

Наше предположение доказано.

Таким же образом можно получать асимптотическую оценку функций, заданных интегралами, и при $x \to \infty$.

Пример. Найдем главный член асимптотики при $x \to +\infty$ интеграла

$$G(x) = \int\limits_0^x e^{t^2}\, dt$$

Для того, чтобы выдвинуть какую-нибудь гипотезу о том, как выглядит этот главный член, воспользуемся формулой интегрирования по частям. Представить подынтегральную функцию в виде произведения можно многими способами, но нам нужно такое представление, чтобы после применения этой формулы получившийся интеграл рос медленнее, чем исходный.

Вот это представление: $e^{t^2} = \frac{1}{2t} \cdot 2te^{t^2} = \frac{1}{2t} \cdot (e^{t^2})'$. Соответственно

$$\int\limits_0^x e^{t^2}\, dt = \int\limits_0^x \frac{1}{2t} \cdot (e^{t^2})'\, dt = \frac{1}{2t} \cdot e^{t^2}\Big|_0^x - \int\limits_0^x (-\frac{1}{2t^2}) \cdot e^{t^2}\, dt$$

Получившиеся в правой части выражения не имеют смысла при $x = 0$, однако нас интересует поведение функции $G(x)$ при $x \to +\infty$, поэтому можно вместо $x = 0$ взять любое положительное значение $x = a$, например $x = 1$. Итак,

$$\int_1^x e^{t^2}\,dt = \int_1^x \frac{1}{2t}\cdot(e^{t^2})'\,dt = \frac{1}{2t}\cdot e^{t^2}\Big|_1^x + \int_1^x \frac{1}{2t^2}\cdot e^{t^2}\,dt = \frac{1}{2x}\cdot e^{x^2} + \varphi(x)$$

Покажем, что функция $\frac{1}{2x}\cdot e^{x^2}$ и есть главный член асимптотики функции $G(x)$ при $x \to +\infty$. Для этого мы не будем оценивать функцию $\varphi(x)$, а воспользуемся правилом Лопиталя.

То, что $\frac{1}{2x}\cdot e^{x^2} \to +\infty$, должно быть уже известно читателю. Если нет — можно доказать это в помощью все того же правила Лопиталя.

Покажем, что $G(x)$ также стремится к бесконечности. Для этого оценим подынтегральную функцию: $e^{t^2} > 1$ при $t > 1$. Следовательно при $x > 1$

$$G(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt = \int_0^1 e^{t^2}\,dt + \int_1^x e^{t^2}\,dt > 0 + \int_1^x 1\,dt = x - 1$$

Итак, $G(x) > x - 1$ при $x > 1$, поэтому $G(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Для раскрытия неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ воспользуемся правилом Лопиталя.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{(2x)^{-1}\cdot e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}(1-1/2x^2)} = 1$$

Итак, мы получили асимптотику интеграла при $x \to +\infty$:

$$G(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt \sim \frac{1}{2x}\cdot e^{x^2}$$

Упражнение. Покажите, что $\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}$ при $x \to 0$.

2.4. Теоремы о среднем

Определение. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. Величина $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Понятие интегрального среднего является аналогом понятия среднего арифметического и обладает многими сходными свойствами.

Пример. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и ограничена, то есть $m \leqslant f(x) \leqslant M$ в основном (m, $M \in \mathbb{R}$), тогда среднее значение также заключено между m и M:

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Это утверждение является простым следствием монотонности определенного интеграла. Мы уже получали оценку

$$m\cdot(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M\cdot(b-a).$$

Поскольку $a<b$, то можно поделить все части неравенства на положительное число $(b-a)$ и получить оценку среднего.

Этот пример дает простейший вариант *теоремы о среднем*. Можно усилить его, оценивая подынтегральную функцию более точно.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, тогда существует такая точка $c\in[a;b]$, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$.

Докажем это утверждение. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, она ограничена на нем и достигает наименьшего и наибольшего значений. Пусть $m = \min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ и $M = \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$. Как мы выяснили, значение $\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ принадлежит отрезку $[m;M]$. Следовательно, по теореме Больцано–Коши о промежуточном значении, на отрезке $[a;b]$ существует хотя бы одна точка c, в которой это значение функцией $f(x)$ принимается, то есть выполняется равенство $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а это и требовалось доказать.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Она непрерывна всюду на $\mathbb{R}$, и следовательно, имеет точную первообразную, однако доказано, что эта первообразная не может быть выражена в элементарных функциях. Тем не менее, покажем, что среднее значение этой функции на отрезке $[0;2\pi]$ положительно, что равносильно утверждению

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx > 0.$$

Подынтегральная функция меняет знак одновременно с функцией $\sin x$, то есть $f(x) > 0$ на интервале $(0;\pi)$ и $f(x) < 0$ на интервале $(\pi;2\pi)$. Представим отрезок $[0;2\pi]$ в виде объединения $[0;\pi]\cup[\pi;2\pi]$ и воспользуемся аддитивностью интеграла:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Во втором интеграле сделаем замену $x = \pi + t$, и получим два интеграла по одному и тому же отрезку:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin(\pi+t)}{\pi+t}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx - \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{\pi+t}\,dt = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt - \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{\pi+t}\,dt = \int\limits_0^{\pi} \sin t(\frac{1}{t} - \frac{1}{\pi+t})\,dt$$

На отрезке $[0;\pi]$ оба множителя, стоящие в последнем интеграле, положительны в основном, следовательно, интеграл также положителен.

Упражнение. Определите знак интеграла $\int\limits_0^{\pi} e^{-x^2}\cos x\,dx$

Упражнение. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на луче $[0;+\infty)$, и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. Выясните, чему равен предел среднего значения функции $f(x)$ по отрезку $[0;b]$ при $b \to +\infty$.

Указание. Рассмотрите случаи $A = 0$ и $A \neq 0$.

Упражнение. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и монотонно возрастает на луче $[0;+\infty)$. Докажите, что среднее значение функции $f(x)$ по отрезку $[0;b]$ также монотонно возрастает с ростом b.

Первая теорема о среднем. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и ограничены, причем $m \leqslant f(x) \leqslant M$, а функция $\varphi(x)$ не меняет знака внутри отрезка $[a;b]$, тогда найдется значение $\mu \in [m;M]$ такое, что

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \mu \cdot \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$$

Если кроме этого функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то найдется такая точка $c \in [a;b]$, что

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(c)\cdot\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$$

Замечание. При $\varphi(x) \equiv 1$ получаем простейший вариант теоремы о среднем, доказанный ранее.

Замечание. Как правило функция $\varphi(x)$ положительна и является плотностью в физических задачах или задачах теории вероятностей.

Пример. Покажем, что последовательность интегралов

$$I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

стремится к нулю при $n \to +\infty$.

Положим $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, $\varphi(x) = x^n$. Все условия первой теоремы о среднем выполнены, поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+c}}\int\limits_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+c}}\cdot\frac{1}{n+1}$$

Точка c принадлежит отрезку $[0;1]$, функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ положительна и монотонно убывает, поэтому $\dfrac{1}{\sqrt{1+c}} < f(0) = 1$. Отсюда получаем оценку сверху:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,dx < \frac{1}{n+1}$$

Поскольку подынтегральная функция положительна, то $I_n > 0$. По теореме о пределе зажатой последовательности получаем требуемое.

Упражнение. Выясните, является число $\dfrac{e-1}{2}$ оценкой снизу или оценкой сверху для интеграла $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)}\,dx$. Найдите оценку с другой стороны.

Пример. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;1]$, $a>0$, $b>0$. Найдем $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,dx$.

Положим $\varphi(x)=\frac{f(x)}{x}$. Поскольку все условия первой теоремы о среднем выполнены, на отрезке $[a\varepsilon;b\varepsilon]$ найдется точка c_ε такая, что

$$\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,dx=f(c_\varepsilon)\cdot\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx=f(c_\varepsilon)\cdot\ln x\Big|_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}=f(c_\varepsilon)\cdot\ln\frac{b}{a}$$

Так как $a\varepsilon\leqslant c_\varepsilon\leqslant b\varepsilon$, то $c_\varepsilon\to+0$ при $\varepsilon\to+0$. Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=0$ справа, поэтому $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}f(c_\varepsilon)=f(0)$.

Таким образом, $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,dx=f(0)\ln\frac{b}{a}$.

Вторая теорема о среднем. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и ограничены, причем функция $g(x)$ монотонна на $(a;b)$, тогда найдется значение $\xi\in[a;b]$ такое, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx=g(a+0)\cdot\int\limits_a^\xi f(x)\,dx+g(b-0)\cdot\int\limits_\xi^b f(x)\,dx$$

Если кроме этого функция $g(x)$ монотонно убывает и неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то найдется такая точка $\xi\in[a;b]$, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx=g(a+0)\cdot\int\limits_a^\xi f(x)\,dx$$

Если же функция $g(x)$ монотонно возрастает и неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то найдется такая точка $\xi \in [a;b]$, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b-0)\cdot\int\limits_\xi^b f(x)\,dx$$

Замечание. Например, в физических задачах, описывающих затухающие колебания, функция $g(x)$, играющая роль амплитуды, положительна и монотонно убывает.

Пример. Оценим интеграл $\int\limits_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx$, $b > a > 0$.

Положим $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Все условия второй теоремы о среднем выполняются, поэтому найдется такая точка $\xi \in [a;b]$, что

$$\int\limits_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{a}\cdot\int\limits_a^\xi \sin x\,dx = \frac{1}{a}(\cos a - \cos\xi)$$

Поскольку $|\cos a - \cos\xi| \leqslant 2$ независимо от выбора точек a и ξ, весь интеграл можно оценить по модулю величиной $\frac{2}{a}$.

Заметим, что эта оценка не содержит значения b, значит, верна при любом $b > a$. Таким образом, мы получили оценку интеграла, дополнительного к интегральному синусу: $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \leqslant \frac{2}{a}$.

Упражнение. Оцените интеграл $\int\limits_a^b \sin x^2\,dx$, $b > a > 0$.

Указание. Сделайте замену переменной $t = x^2$.

Глава 3

Несобственный интеграл. Исследование сходимости

Как уже упоминалось выше, мы распространили понятие определенного интеграла на случай, когда промежуток интегрирования $\langle a; b\rangle$ бесконечен или обобщенная первообразная $F(x)$ определена лишь на интервале $(a; b)$, положив

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b-0} F(x) - \lim_{x\to a+0} F(x) = F(x)\Big|_{a+0}^{b-0}$$

При этом предполагалось, что существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a+0} F(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} F(x)$. Напомним, что в классических учебниках такие интегралы называются несобственными. Точки a и b называются особыми. В случае, когда указанные пределы существуют, говорят, что интеграл сходится.

Во многих случаях, когда обобщенная первообразная $F(x)$ не выражается в элементарных функциях или сделать это можно, но затруднительно, возникает вопрос: как определить, существуют ли эти пределы, не вычисляя самой функции $F(x)$, а лишь изучая поведение подынтегральной функции $f(x)$?

Простейший признак, гарантирующий сходимость несобственного интеграла, — это признак, основанный на сравнении подынтегральной функции с другой функцией, от которой интеграл заведомо сходится либо расходится. Ограничимся случаем одной особой точки b.

Теорема об интегрируемой мажоранте. Пусть неотрицательная функция $f(x)$ интегрируема на каждом промежутке $[a; b')$, где $b' < b$.

Если существует интегрируемая функция $g(x)$ такая, что $f(x) \leqslant g(x)$ в некоторой окрестности точки b, причем $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится, тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ также сходится.

Доказательство этой теоремы основано на монотонности интеграла. Если $f(x) \leqslant g(x)$, то первообразные также подчинены неравенству $F(x) \leqslant G(x)$. Причем, в силу неотрицательности функции $f(x)$, первообразные $F(x)$ и $G(x)$ монотонно возрастают. Поэтому существование предела $\lim\limits_{x\to b-0} G(x)$ означает ограниченность сверху не только функции $G(x)$, но и $F(x)$. Следовательно, у $F(x)$ также существует конечный предел при $x \to b-0$.

Замечание. Также несложно доказать, что если существует интегрируемая функция $h(x) > 0$ такая, что $f(x) \geqslant h(x)$ в некоторой окрестности точки b, причем $\int\limits_a^b h(x)\,dx$ расходится, тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ также расходится.

Применение этой теоремы связано с двумя сложностями. Во-первых, надо сформулировать гипотезу, которую мы будем доказывать — если мы хотим доказать *сходимость* интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то нужно оценивать функцию $f(x)$ *сверху*, а если мы думаем, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *расходится*, то нужно оценивать функцию $f(x)$ *снизу*.

Во-вторых, нужно иметь запас эталонных функций, с которыми мы будем сравнивать функцию $f(x)$, и про которые мы точно знаем — имеют их первообразные конечный предел или нет. Не говоря уже о том, что нужно уметь проводить сам процесс оценки.

К счастью, для большинства функций, заданных аналитическими выражениями, эти проблемы разрешимы.

Во-первых, можно сформулировать вариант теоремы сравнения, позволяющий заменять подынтегральную функцию на более простую, и только потом выяснять, сходится ли интеграл от этой функции.

Теорема сравнения. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0$, тогда интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходятся либо расходятся одновременно.

Таким образом, нужно выделить у функции $f(x)$ при $x \to b-0$ главную часть $Kg(x)$ как можно более простого вида, чтобы первообразную $G(x)$ можно было вычислить непосредственно. Часто удается подобрать степенную функцию $g(x) = x^p$. После этого достаточно вспомнить, как выглядит первообразная от x^p, чтобы ответить на вопрос о сходимости.

Полезно иметь в виду следующие утверждения:

$\int\limits_0^{\varepsilon} \dfrac{1}{x^k}\,dx$ сходится в нуле при $k < 1$ и расходится при $k \geqslant 1$.

$\int\limits_M^{+\infty} \dfrac{1}{x^k}\,dx$ сходится в $+\infty$ при $k > 1$ и расходится при $k \leqslant 1$.

Пример. Исследуем сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^2-x+1}{x^4-x^2+1}\,dx$.

Поскольку знаменатель дроби не имеет корней на промежутке $x \geqslant 0$, подынтегральная функция непрерывна, а следовательно интегрируема на любом конечном промежутке $[0; b']$. Таким образом, единственной особой точкой интеграла является $b = +\infty$.

Поскольку $\dfrac{x^2-x+1}{x^4-x^2+1} \sim \dfrac{1}{x^2}$ при $x \to +\infty$, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^2-x+1}{x^4-x^2+1}\,dx$ сходится.

Упражнение. Выясните, при каких значениях m и n сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^m}{x^n+1}\,dx$ $(n \leqslant 0)$.

Пример. Выясним, при каких значениях n сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x^n}\,dx$.

Помимо точки $b=+\infty$ интеграл может иметь особую точку в нуле. рассмотрим каждую особую точку отдельно.

Поскольку $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$, то $\dfrac{\ln(1+x)}{x^n} \sim \dfrac{1}{x^{n-1}}$. Как мы помним, интеграл $\int\limits_0^{\varepsilon} \dfrac{1}{x^{n-1}}\,dx$ сходится если и только если $n-1<1$, то есть $n<2$.

Теперь рассмотрим поведение функции $\dfrac{\ln(1+x)}{x^n}$ в окрестности точки $b=+\infty$. Можно заменить $\ln(1+x)$ на эквивалентную функцию $\ln x$.

Покажем, что при $n \neq 1$ интегралы от функций $\dfrac{\ln x}{x^n}$ и $\dfrac{1}{x^n}$ сходятся либо расходятся в точке $b=+\infty$ одновременно.

Пусть $n>1$. Поскольку $\ln x = o(x^p)$ при $x \to +\infty$ для любого $p>0$, то в некоторой окрестности точки $b=+\infty$ выполняется неравенство $\ln x < x^p$. Таким образом, $\dfrac{\ln x}{x^n} < \dfrac{x^p}{x^n} = \dfrac{1}{x^{n-p}}$.

Выбирая p настолько малым, чтобы по-прежнему выполнялось условие $n-p>1$, мы тем самым покажем, что $\int\limits_M^{+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}\,dx$ сходится при $n>1$.

Пусть теперь $n<1$. Поскольку $\ln x > 1$ при $x \to +\infty$, то $\dfrac{\ln x}{x^n} > \dfrac{1}{x^n}$.

Таким образом, мы установили, что $\int\limits_M^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n}\,dx$ расходится при $n < 1$.

Осталось рассмотреть случай $n = 1$. Первообразную от $\frac{\ln x}{x}$ легко вычислить непосредственно, сделав замену переменной $t = \ln x$:

$$\int\limits_M^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \int\limits_{\ln M}^{+\infty} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{\ln M}^{+\infty} = +\infty$$

Таким образом, при $n = 1$ интеграл $\int\limits_M^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n}\,dx$ расходится.

Собирая воедино всю полученную информацию, мы делаем вывод,что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,dx$ сходится если и только если $1 < n < 2$.

Упражнение. Выясните, при каких значениях p сходится интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln x}\,dx$$

Приложение

Вопросы к коллоквиуму

Непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$ имеет равные значения в точках a и b. Чему равен $\int\limits_a^b f'(x)\,dx$?

Докажите, что $\int\limits_{-1}^{1} \sin^2 x \ln(x + \sqrt{1+x^2})\,dx = 0$

Сравните интегралы $\int\limits_1^e \ln x\,dx$ и $\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx$.

Найдите предел последовательности $S_n = n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$

Докажите неравенство $\sin\varepsilon < \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx < 2\sin\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0; \pi/2)$.

Докажите неравенство $\cos x - \sin x \leqslant 1 - x$ при $x \in [0; \pi/2]$.

Разложите в ряд по степеням x вблизи нуля функцию $\int\limits_0^x \cos t^2\,dt$.

Докажите, что $\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt = o(e^{x^2})$ при $x \to +\infty$.

При каких значениях p сходится интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^p x\,dx$?

Образец контрольной работы

1. Вычислите $\displaystyle\int\limits_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$.

2. Докажите, что $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx = 0$.

3. $I_n = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ $(n\in\mathbb{N})$. Покажите, что $I_n = n!$

4. Получите при $x\to+\infty$ главный член асимптотики интеграла $\Gamma(a;x) = \displaystyle\int\limits_x^{+\infty} e^{-t}t^{a-1}\,dt$ $(a<2)$. Ответ обоснуйте.

5. Рассмотрев $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ и разбивая промежуток интегрирования на равные части, вычислите $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}$.

6. Исследовать сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx$

Оглавление